



Metoda elementów skończonych (MES1)

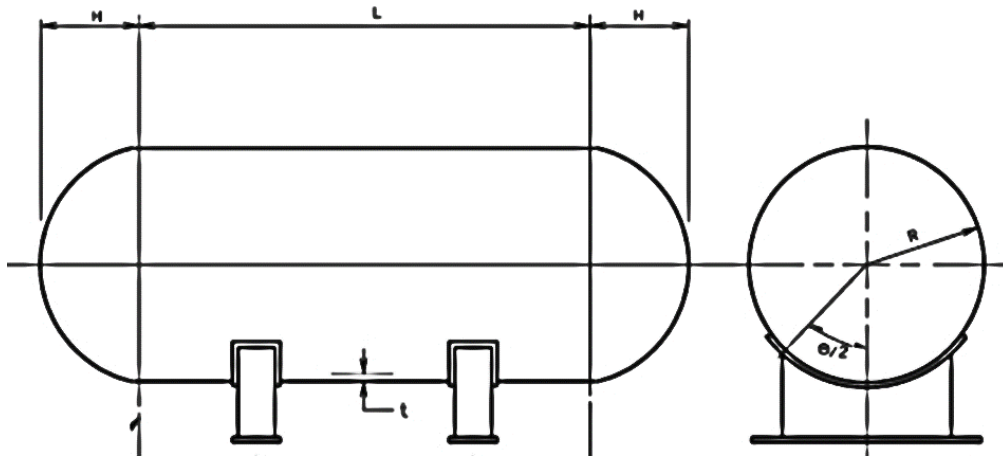
Wykład 12A. Element powłokowy 3D

05.2022

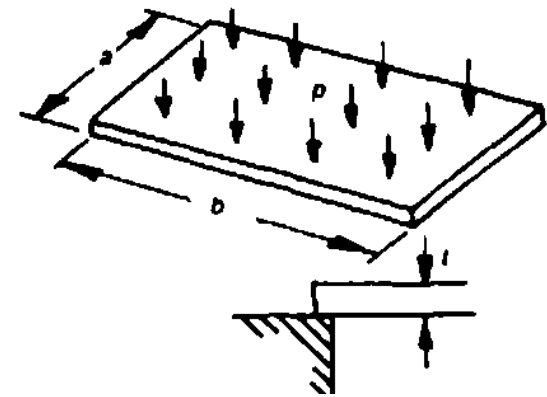
Powłoki i płyty

Modele cienkopowłokowe i płytowe można zastosować do analizy następujących konstrukcji:

- kadłub samolotu, ostona skrzydła,
- kadłub łodzi,
- dach (podtoga) budynku.



Zbiorniki cienkościenne



Płyta prostokątna

Przykłady płyt i powłok



Pokrycie samolotu (model potokowy)



Struktura budynku (model płytowy)

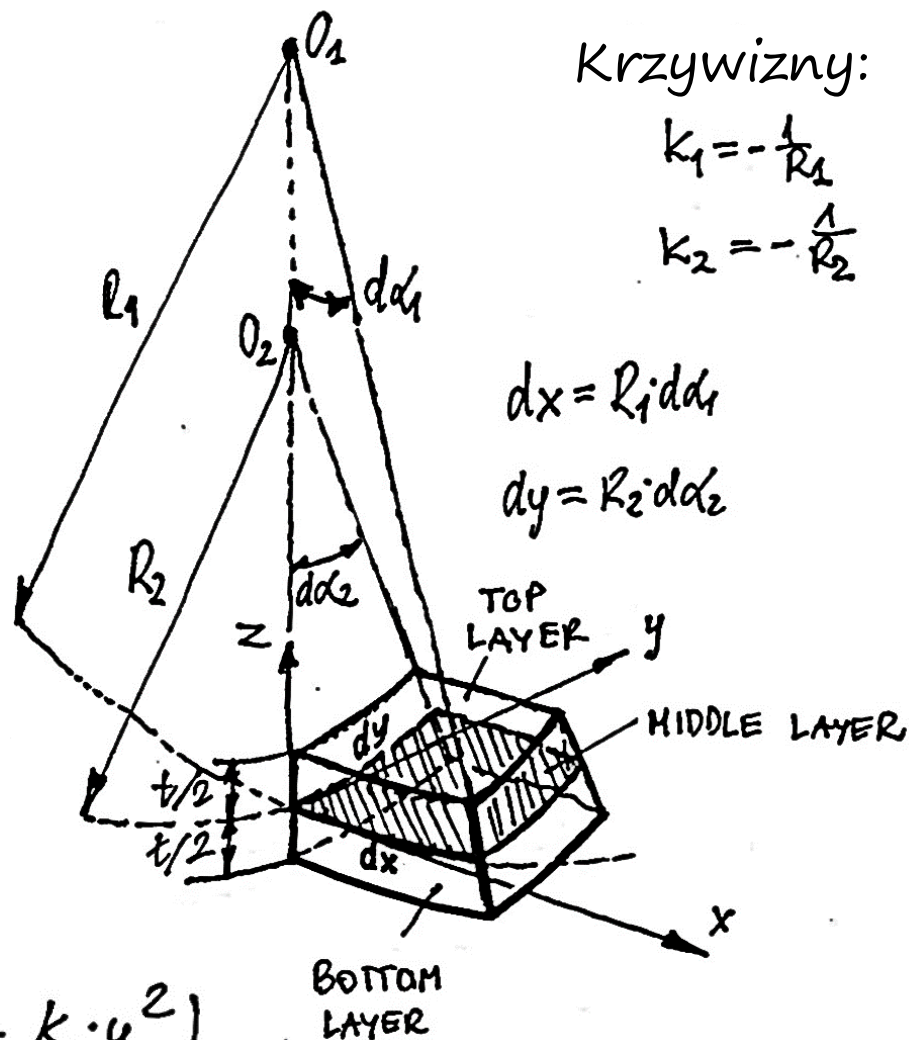


Jacht motorowy:
Kadłub (powłoka), pokład (płyta)

Teoria liniowa cienkich powłok

Typy powłok:

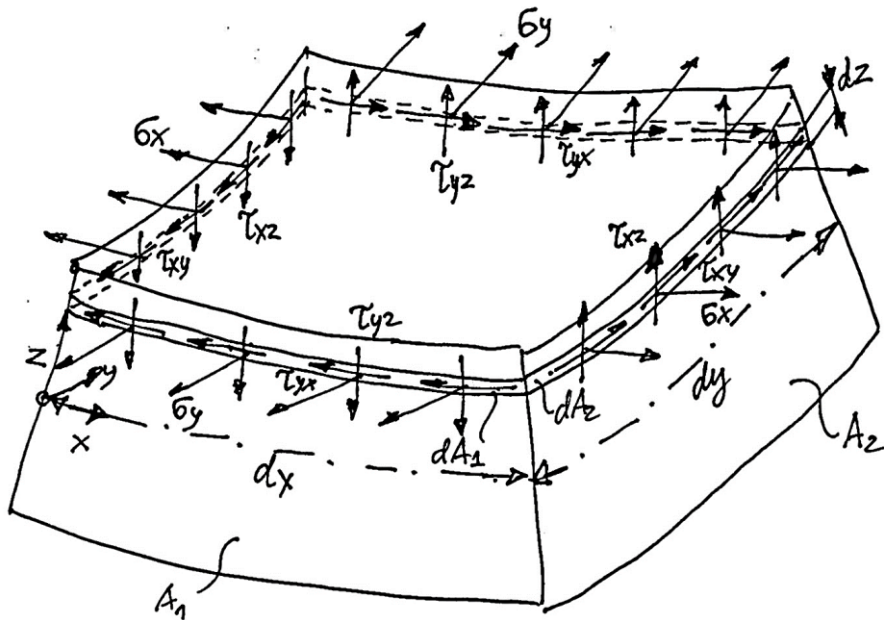
- eliptyczna,
- cylindryczna,
- sferyczna,
- toroidalna,
- hiperboliczna.



$$z = 0.5 (k_1 x^2 + 2k_{12} xy + k_2 y^2)$$

Sily wewnętrzne na poziomie z małego pola dA_z

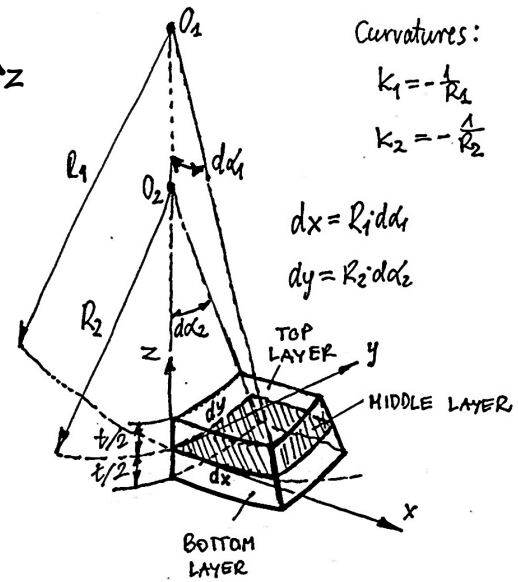
$$\begin{aligned} \sigma_x \cdot dz \cdot (R_2 - z) dd_2 &= \sigma_x \cdot dz \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) R_2 dd_2 = \\ &= \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz dy \end{aligned}$$



Wydatek sily wewnętrznej:

$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad \left(\frac{N}{m}\right)$$

$$\frac{z}{R_1} \approx 0, \quad \frac{z}{R_2} = 0 \Rightarrow N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz$$



Wydatek sily wewnętrznej na poziomie z małego pola dA_z

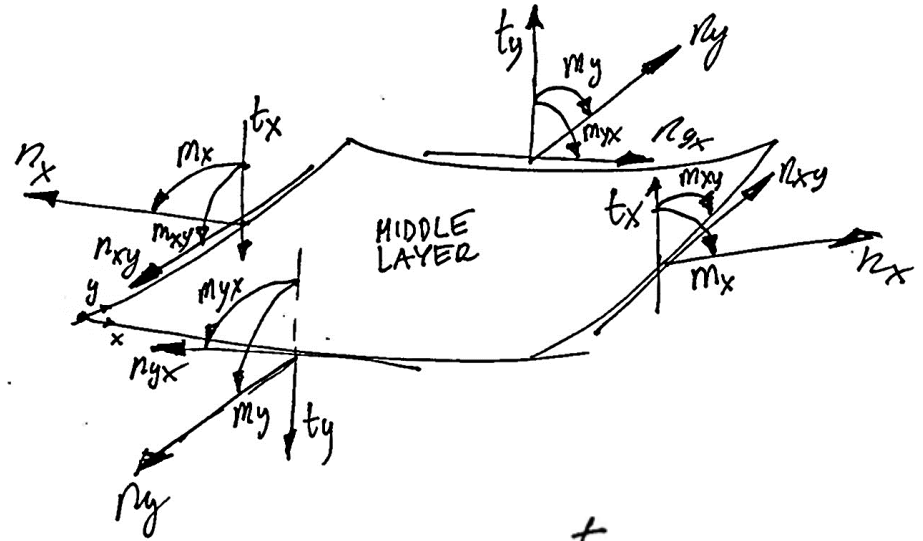
$$dN_x = \frac{\sigma_x \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz dy}{dy} = \sigma_x \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz$$

Sity wewnętrzne:

n - wydatek sily normalnej

m - wydatek momentu gnącego

t - wydatek sily tnącej

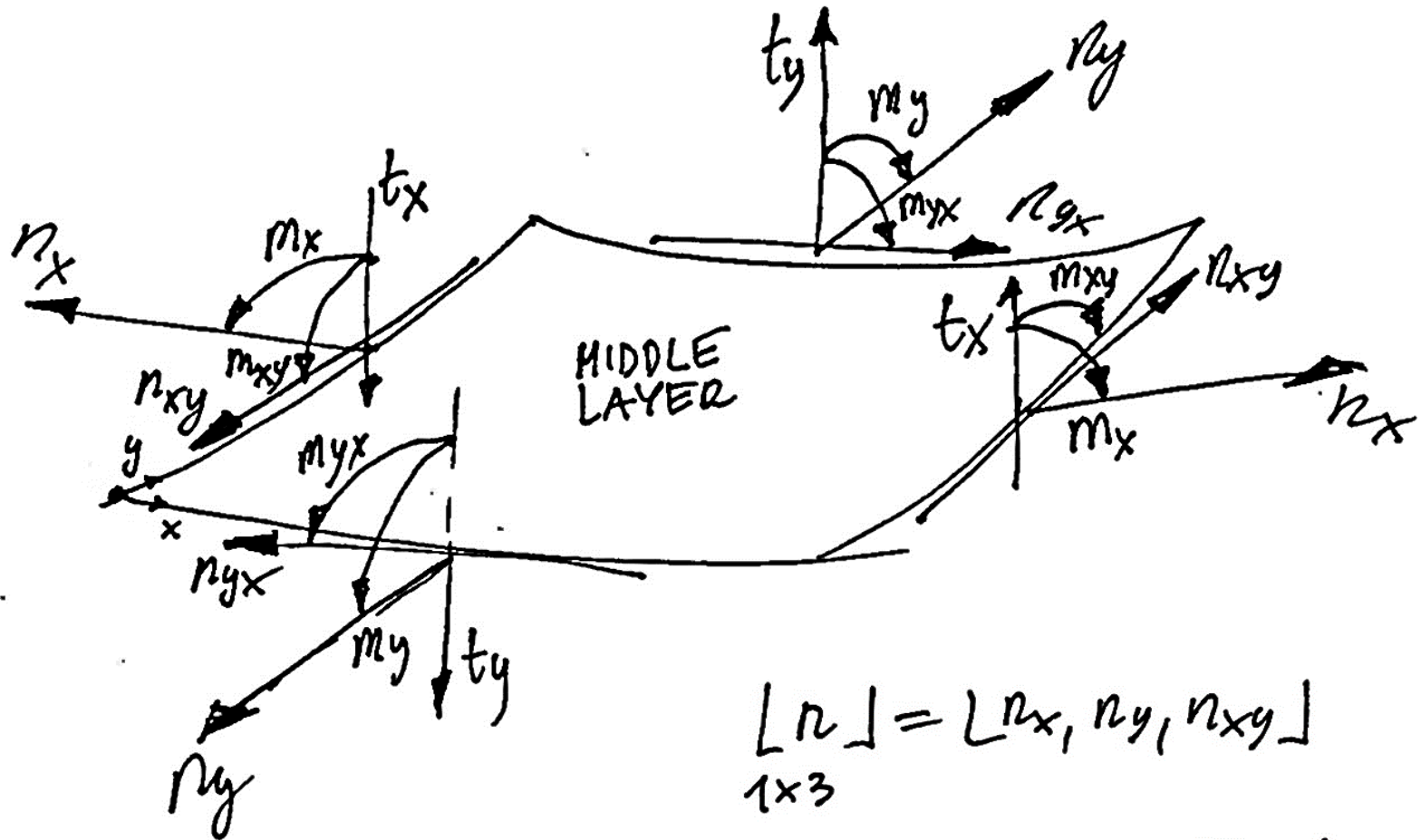


$$n_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz, \quad n_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} dz$$

$$m_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \cdot z dz, \quad m_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y \cdot z dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} \cdot z dz \quad \left(\frac{Nm}{m}\right)$$

$$t_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad t_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

Sity wewnętrzne:



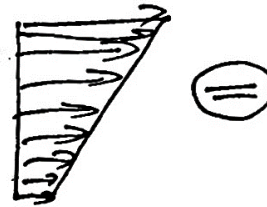
$$[n] = [n_x, n_y, n_{xy}]$$

1x3

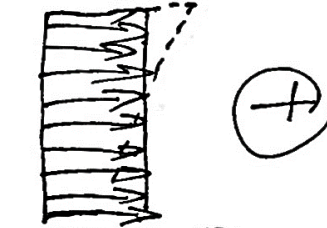
$$[m] = [m_x, m_y, m_{xy}]$$

1x3

Składowe stanu naprężenia



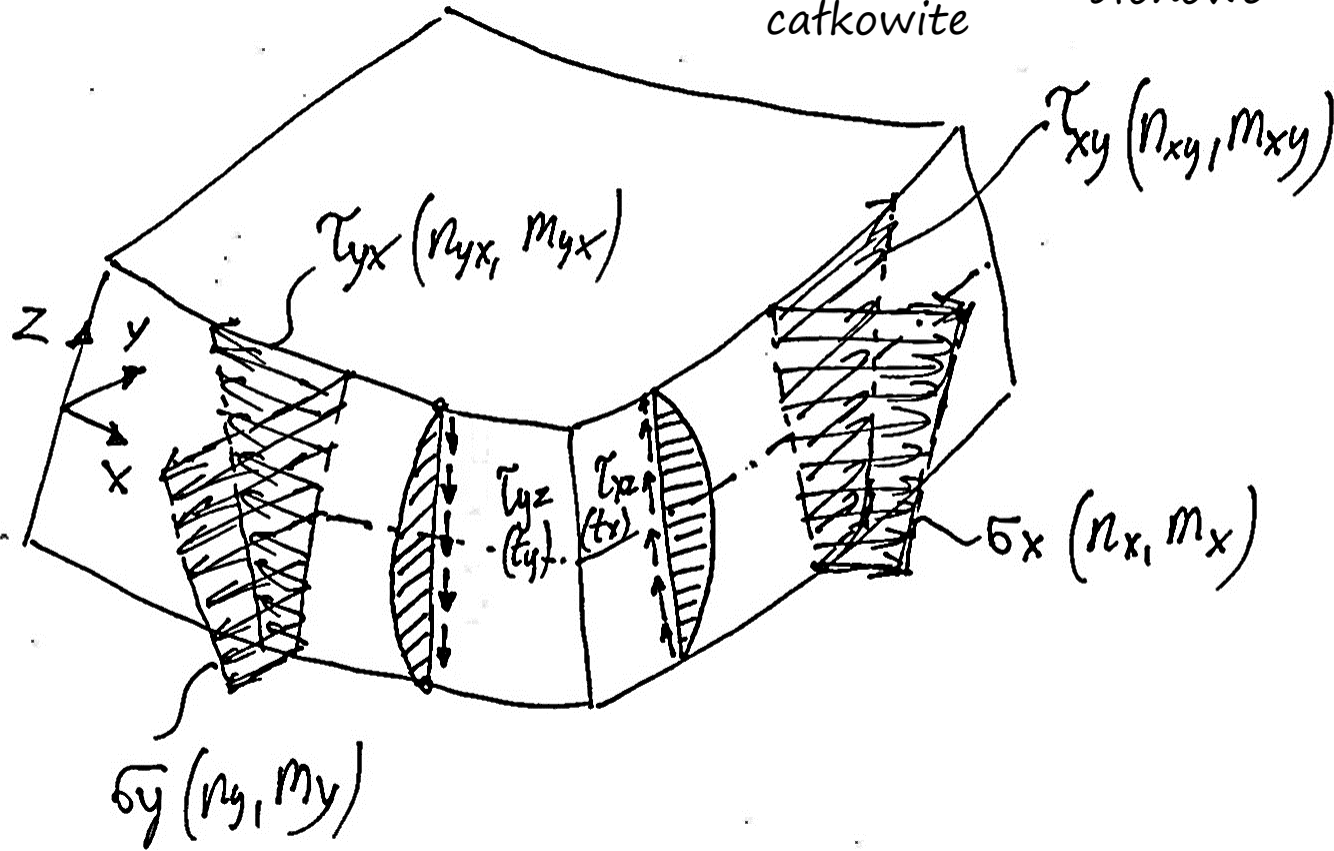
Naprężenia normalne catkowitz



Naprężenia tlonowe

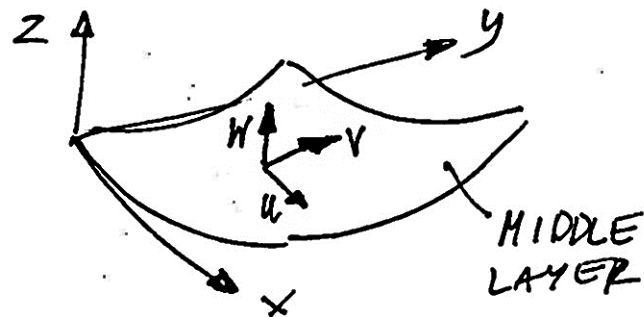


Naprężenia od zginania

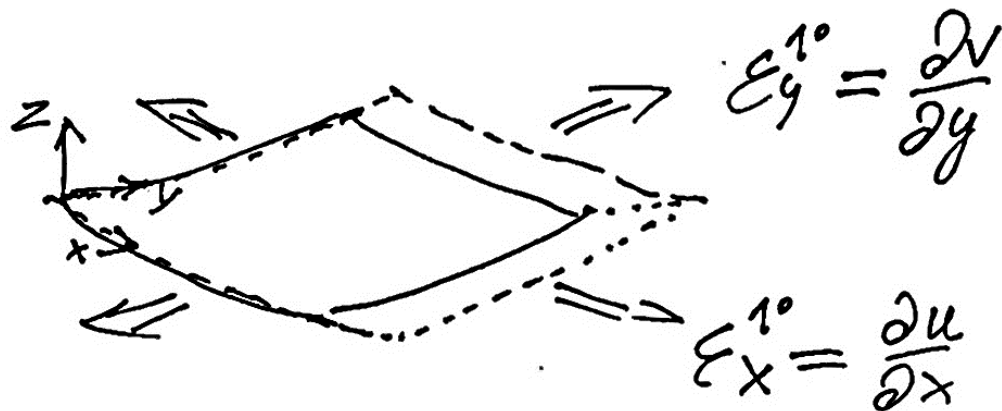


Okształcenia błonowe:

1) Deformacje warstwy środkowej w płaszczyźnie xy

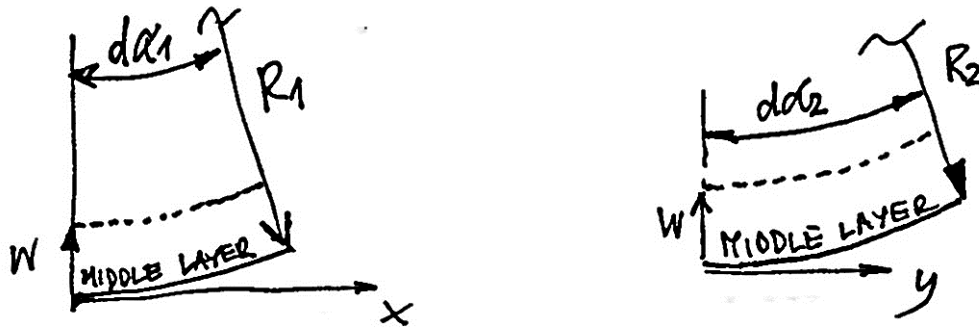


10)



Okształcenia betonowe:

2) Deformacje warstwy środkowej na kierunku z na skutek ugięcia w



$$\epsilon_x^{20} = \frac{(R_1 - w) ddz_1 - R_1 ddz_1}{R_1 ddz_1} = -\frac{w}{R_1} = k_1 \cdot w$$

$$\epsilon_y^{20} = \frac{(R_2 - w) ddz_2 - R_2 ddz_2}{R_2 ddz_2} = -\frac{w}{R_2} = k_2 \cdot w$$

Krzywizny
odpowiadające
geometrii

Odształcenia błonowe (razem):

1^o) + 2^o)

$$\epsilon_x^{MID} = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 \cdot W$$

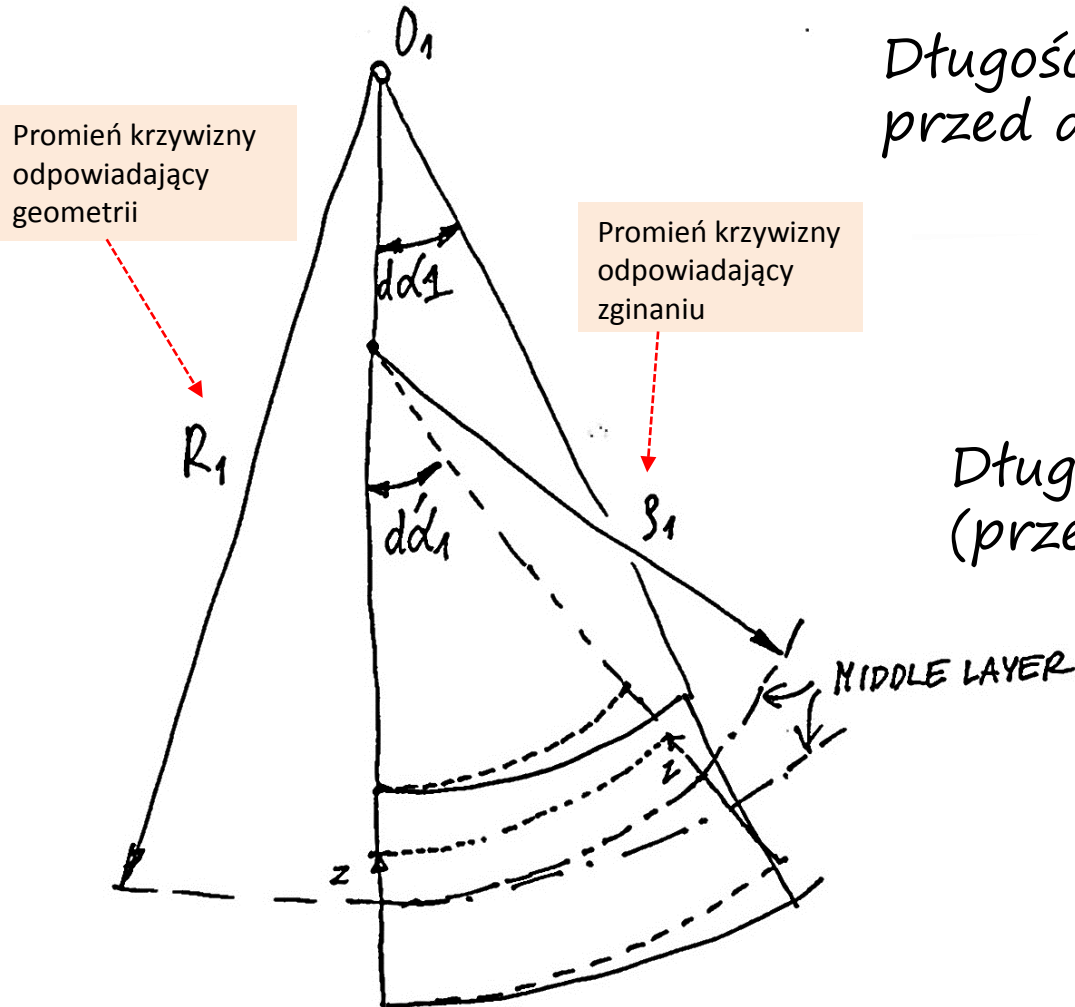
$$\epsilon_y^{MID} = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 \cdot W$$

$$\gamma_{xy}^{MID} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2k_2 \cdot W$$

Krzywizny
odpowiadające
geometrii

Okształtowanie od zginania:

3) Deformacje warstwy na poziomie z



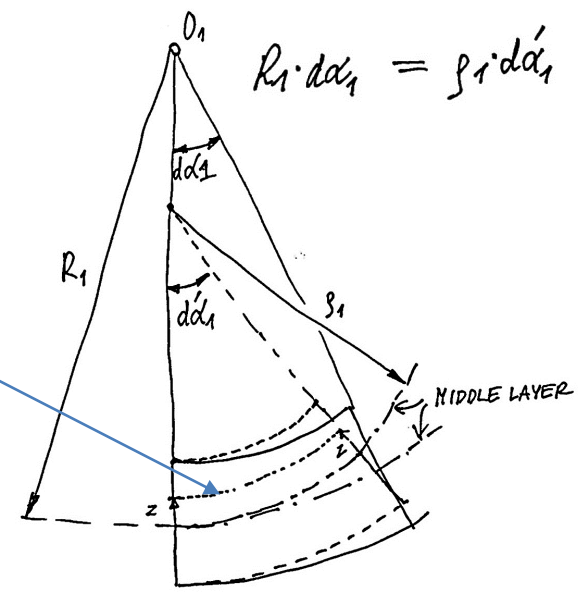
Długość warstwy na poziomie z przed deformacją:

$$R_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \cdot d\alpha_1$$

Długość warstwy środkowej (przed i po deformacji):

$$R_1 \cdot da_1 = R_2 \cdot da_2$$

Odształcenie od zginania (deformacje warstwy na poziomie z)



$$\epsilon_x(z) = \frac{\rho_1 \left(1 - \frac{z}{\rho_1}\right) d\alpha_1' - R_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) d\alpha_1}{R_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) d\alpha_1} =$$

$$= \frac{\rho_1 \left(1 - \frac{z}{\rho_1}\right) \frac{R_1}{\rho_1} d\alpha_1 - R_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) d\alpha_1}{R_1 \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) d\alpha_1} = \frac{\left(1 - \frac{z}{\rho_1}\right) - \left(1 - \frac{z}{R_1}\right)}{\left(1 - \frac{z}{R_1}\right)} =$$

$$= \underbrace{\frac{1 - \frac{z}{\rho_1}}{1 - \frac{z}{R_1}}}_{\approx 1} - 1 = -\frac{z}{\rho_1} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot z = \kappa_x \cdot z$$

krzywizna odpowiadająca zginaniu

$$\epsilon_y(z) = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot z = \kappa_y \cdot z \quad ; \quad \gamma_{xy}(z) = -2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot z = \kappa_{xy} \cdot z$$

Wektor składowych odkształcenia (błonowe + zgięciowe)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{MID} \\ \varepsilon_y^{MID} \\ \gamma_{xy}^{MID} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(z) \\ \varepsilon_y(z) \\ \gamma_{xy}(z) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon^{MID} \end{Bmatrix}}_{3 \times 1} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}}_{3 \times 1} \cdot z \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\{\varepsilon\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\{\varepsilon^{MID}\}}_{3 \times 1} + \underbrace{\{\kappa\}}_{3 \times 1} \cdot z$$

krzywizny
odpowiadające
zginaniu

Wektor składowych naprężenia

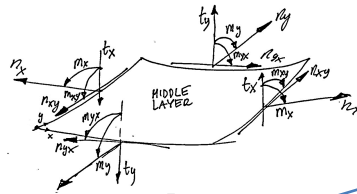
Zakładając warunek PSN:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}$$

mamy:

$$\underbrace{\{\sigma\}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tilde{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{[D]}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\{\varepsilon\}}_{3 \times 1} = \underbrace{[D]}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\{\varepsilon^{MID}\}}_{3 \times 1} + \underbrace{[D]}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\{\kappa\}}_{3 \times 1} \cdot z$$

Sity wewnętrzne



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon^{HID} \end{Bmatrix} + [D] \cdot \{ \delta \} \cdot z$$

$\begin{matrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 & 3 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix}$

$$\begin{Bmatrix} n \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \underbrace{t}_{3 \times 3} [D] \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \epsilon^{HID} \end{Bmatrix}}_{3 \times 1} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [D_n]_{3 \times 3} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon^{HID} \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z dz = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \underbrace{\frac{t^3}{12}}_{3 \times 3} [D] \cdot \begin{Bmatrix} \kappa \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [D_m]_{3 \times 3} \cdot \begin{Bmatrix} \kappa \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

Składowe wektora naprężenia jako funkcje sił wewnętrznych

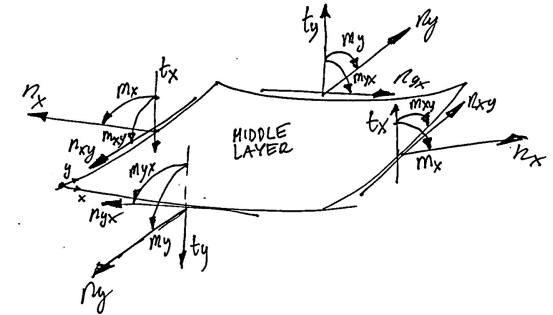
$$\underbrace{\{\sigma\}}_{3 \times 1} = \underbrace{[D]}_{3 \times 3} \underbrace{\{\epsilon^{MID}\}}_{3 \times 1} + \underbrace{[D]}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\{k\}}_{3 \times 1} \cdot z = \frac{1}{t} \cdot \underbrace{\{n\}}_{3 \times 1} + \frac{12}{t^3} \underbrace{\{m\}}_{3 \times 1} \cdot z$$

$$\frac{1}{t} \cdot [D]^{-1} \cdot \{n\}$$

3x3 3x1

$$\frac{12}{t^3} [D]^{-1} \cdot \{m\}$$

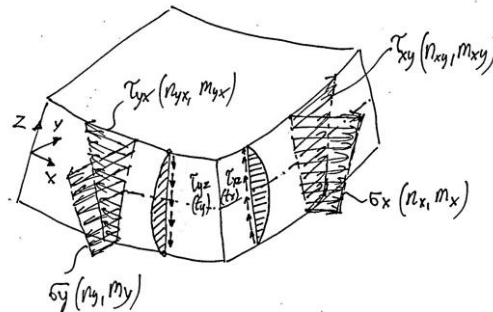
3x3 3x1



Naprężenie normalne:

$$\sigma_x = \frac{n_x}{t} + \frac{12 m_x}{t^3} \cdot z$$

$$\sigma_y = \frac{n_y}{t} + \frac{12 m_y}{t^3} \cdot z$$



Naprężenie styczne (tnące):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{n_{xy}}{t} + \frac{12 m_{xy}}{t^3} \cdot z$$

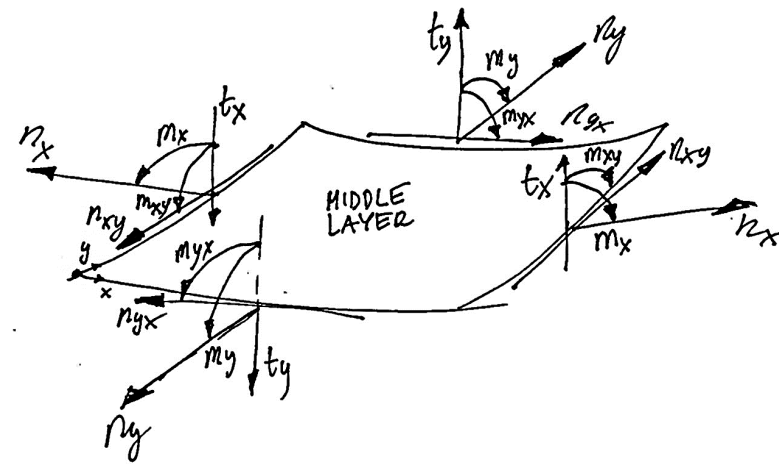
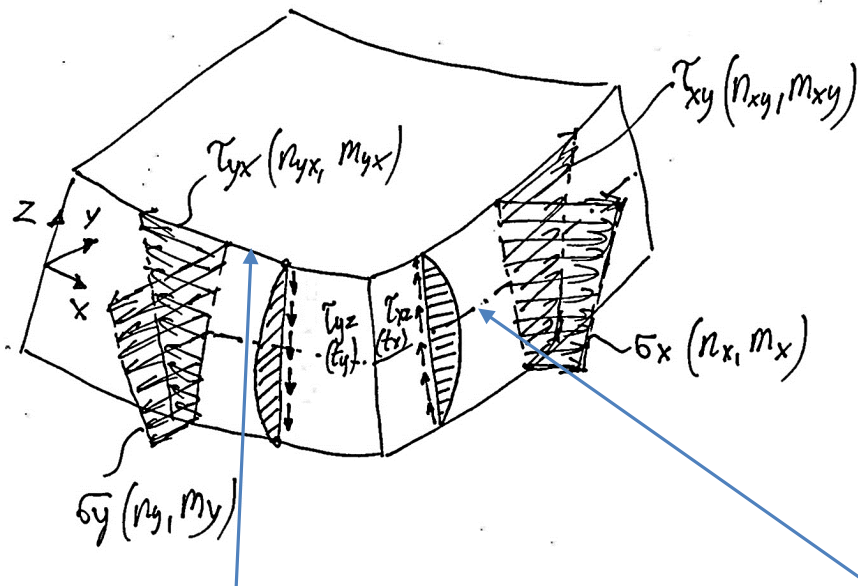
$$\tau_{xz} = \frac{3 t_x}{2 t} \left(1 - \frac{4 z^2}{t^2} \right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3 t_y}{2 t} \left(1 - \frac{4 z^2}{t^2} \right)$$

$$t_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

$$t_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

Wartości ekstremalne składowych naprężenia



TOP LAYER

$$\sigma_x^{TOP} = \frac{n_x}{t} + \frac{6m_x}{t^2}$$

$$\sigma_y^{TOP} = \frac{n_y}{t} + \frac{6m_y}{t^2}$$

$$\tau_{xy}^{TOP} = \frac{n_{xy}}{t} + \frac{6m_{xy}}{t^2}$$

$$\tau_{xz}^{TOP} = 0$$

$$\tau_{yz}^{TOP} = 0$$

MIDDLE LAYER

$$\sigma_x^{MID} = \frac{n_x}{t}$$

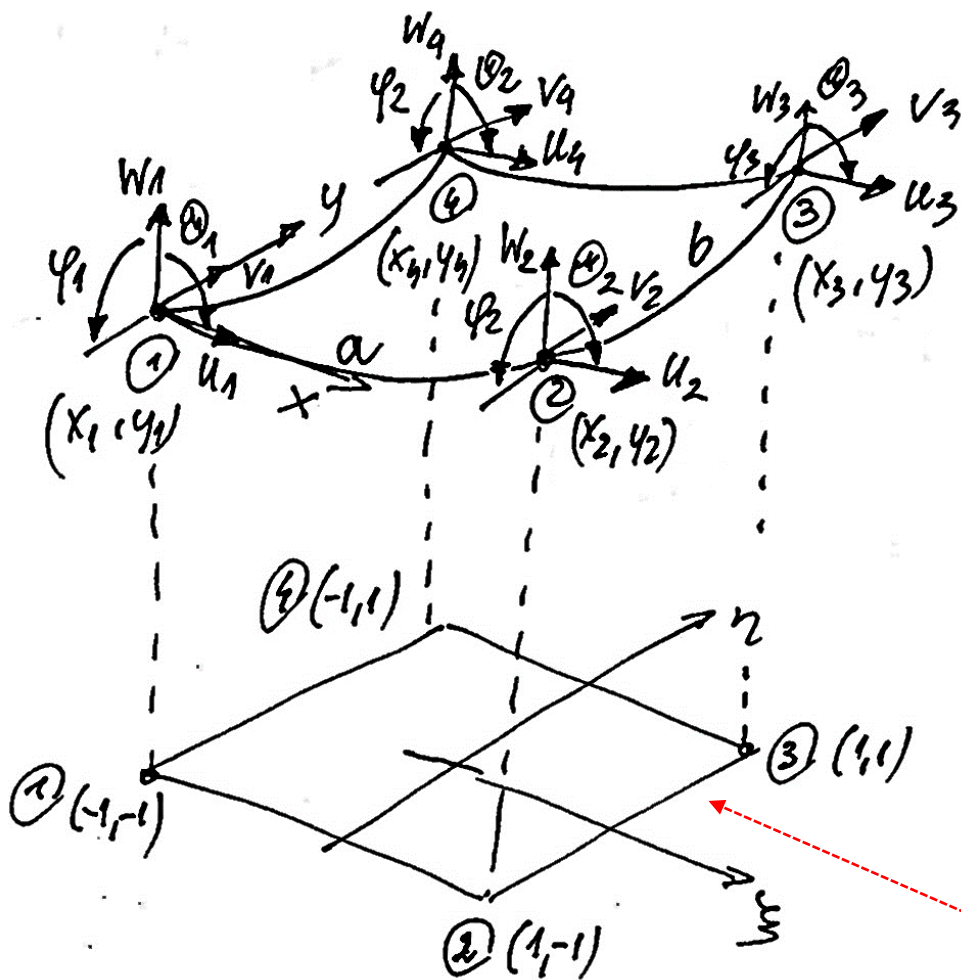
$$\sigma_y^{MID} = \frac{n_y}{t}$$

$$\tau_{xy}^{MID} = \frac{n_{xy}}{t}$$

$$\tau_{xz}^{MID} = \frac{3}{2} \cdot \frac{t_x}{t}$$

$$\tau_{yz}^{MID} = \frac{3}{2} \cdot \frac{t_y}{t}$$

Izoparametryczny element powłokowy



$$n = 4 \Rightarrow$$

$$\boxed{n_p = 5}$$

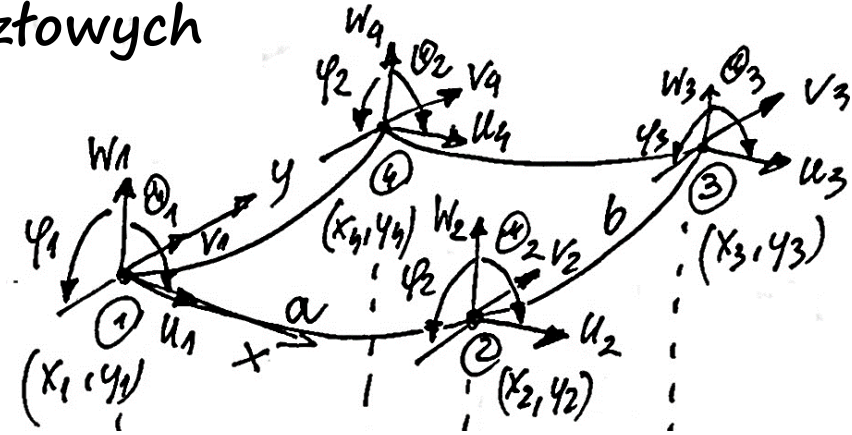
$$n_e = 4 \cdot 5 = 20$$

$$v_i = \frac{dw}{dy} \Big|_i$$

$$\theta_i = - \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i$$

element odniesienia

Lokalny wektor parametrów węzłowych (trzy części)



$$Lq_u]_e = [u_1, u_2, u_3, u_4]_e$$

$$Lq_v]_e = [v_1, v_2, v_3, v_4]_e$$

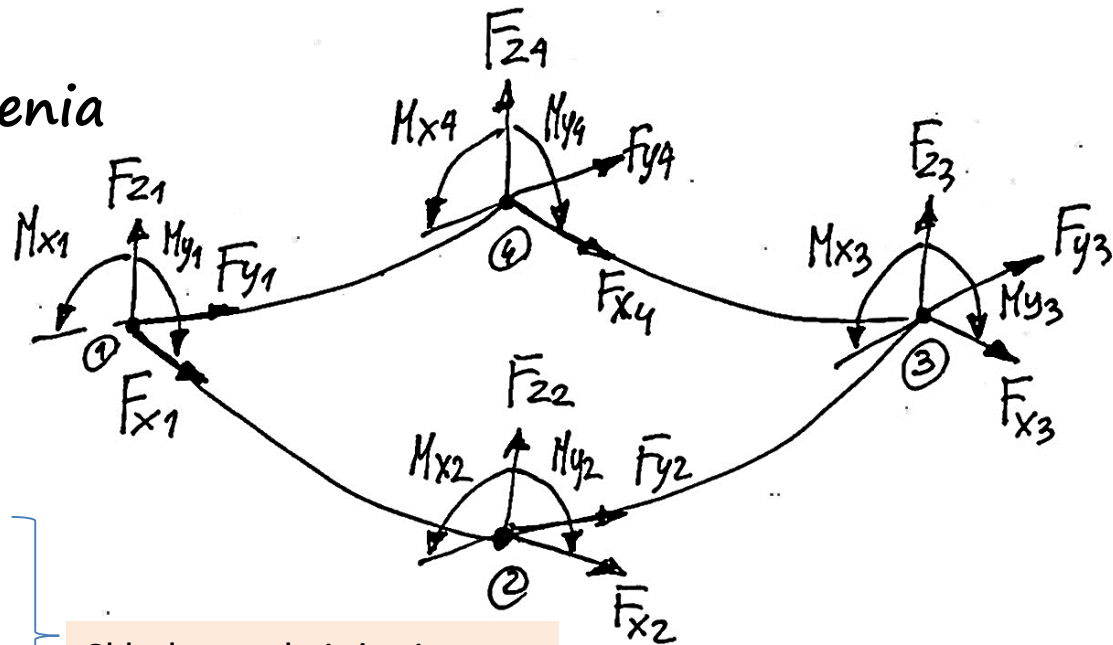
stopnie swobody związane z deformacjami w płaszczyźnie elementu

$$Lq_w]_e = [w_1, \psi_1, \theta_1, w_2, \psi_2, \theta_2, w_3, \psi_3, \theta_3, w_4, \psi_4, \theta_4]_e$$

stopnie swobody związane z deformacjami poza płaszczyznę elementu

$$Lq]_e = [Lq_u]_e, [Lq_v]_e, [Lq_w]_e]_e$$

Lokalny wektor obciążenia (trzy części)



$$\underline{[F_x]}_e = [F_{x1}, F_{x2}, F_{x3}, F_{x4}]$$

1×4

$$\underline{[F_y]}_e = [F_{y1}, F_{y2}, F_{y3}, F_{y4}]$$

1×4

Składowe obciążenia związane z deformacjami w płaszczyźnie elementu

$$\underline{[F_z]}_e = [F_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, F_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, F_{z3}, M_{x3}, M_{y3}, F_{z4}, M_{x4}, M_{y4}]$$

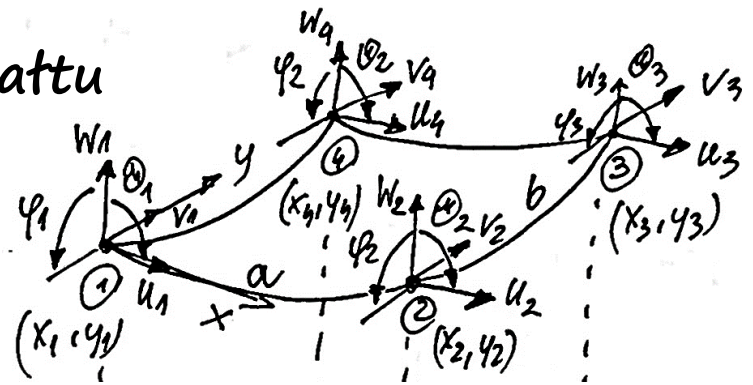
1×12

Składowe obciążenia związane z deformacjami poza płaszczyzną elementu

$$\underline{[F]}_e = [\underline{[F_x]}_e, \underline{[F_y]}_e, \underline{[F_z]}_e]$$

1×20

Aproksymacja węzłowa i funkcje kształtu



$$u = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4$$

$$v = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot v_3 + N_4 \cdot v_4$$

Przemieszczenia
w płaszczyźnie
elementu

$$w = N_{11} \cdot w_1 + N_{12} \cdot \varphi_1 + N_{13} \cdot \theta_1 + N_{21} \cdot w_2 + N_{22} \cdot \varphi_2 + N_{23} \cdot \theta_2 + N_{31} \cdot w_3 + N_{32} \cdot \varphi_3 + N_{33} \cdot \theta_3 + N_{41} \cdot w_4 + N_{42} \cdot \varphi_4 + N_{43} \cdot \theta_4$$

Przemieszczenia poza
płaszczyzną elementu

$$\underset{1 \times 4}{[N]} = [N_1, N_2, N_3, N_4]$$

(wielomiany współrzędnych ξ, η)

$$\underset{1 \times 12}{[N_w]} = [N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{21}, N_{22}, N_{23}, N_{31}, N_{32}, N_{33}, N_{41}, N_{42}, N_{43}]$$

(wielomiany Hermite'a)

Aproksymacja węzłowa i funkcje kształtu

$$u = \underbrace{[N]}_{1 \times 4} \cdot \{q_u\}_e$$

$$v = \underbrace{[N]}_{1 \times 4} \cdot \{q_v\}_e$$

$$w = \underbrace{[N_w]}_{1 \times 12} \cdot \{q_w\}_e$$

Przemieszczenia
w płaszczyźnie
elementu

Przemieszczenia poza
płaszczyzną elementu

$$\{u\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \underbrace{[N]}_{1 \times 4} & \underbrace{[0]}_{1 \times 4} & \underbrace{[0]}_{1 \times 12} \\ \underbrace{[0]}_{1 \times 4} & \underbrace{[N]}_{1 \times 4} & \underbrace{[0]}_{1 \times 12} \\ \underbrace{[0]}_{1 \times 4} & \underbrace{[0]}_{1 \times 4} & \underbrace{[N_w]}_{1 \times 12} \end{Bmatrix} \cdot \{q\}_{20 \times 1} = \underbrace{[N]}_{3 \times 20} \cdot \{q\}_{20 \times 1}$$

Odształcenia btonowe

Wektor stopni swobody związanych z deformacjami w płaszczyźnie elementu

$$\epsilon_x^{MID} = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 \cdot W = \frac{\partial \underline{[N]}_{1 \times 4}}{\partial x} \cdot \{q_u\}_e + k_1 \cdot \underline{[N_w]}_{1 \times 12} \cdot \{q_w\}_e$$

$$\epsilon_y^{MID} = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 \cdot W = \frac{\partial \underline{[N]}_{1 \times 4}}{\partial y} \cdot \{q_v\}_e + k_2 \cdot \underline{[N_w]}_{1 \times 12} \cdot \{q_w\}_e$$

Krzywizny odpowiadające geometrii

Wektor stopni swobody związanych z deformacjami poza płaszczyzną elementu

$$\gamma_{xy}^{MID} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + k_{12} \cdot W$$

$$= \frac{\partial \underline{[N]}_{1 \times 4}}{\partial y} \cdot \{q_u\}_e + \frac{\partial \underline{[N]}_{1 \times 4}}{\partial x} \cdot \{q_v\}_e + k_{12} \cdot \underline{[N_w]}_{1 \times 12} \cdot \{q_w\}_e$$

Odształcenia giętne (funkcje krzywizn):

$$\begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \underbrace{[N_w]}_{1 \times 12}}{\partial x^2} \cdot \underbrace{\{q_w\}_e}_{12 \times 1} \\ \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \underbrace{[N_w]}_{1 \times 12}}{\partial y^2} \cdot \{q_w\}_e \\ \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \underbrace{[N_w]}_{1 \times 12}}{\partial x \partial y} \{q_w\}_e \end{aligned}$$

Wektor stopni swobody
związanych z deformacjami
poza płaszczyznę elementu

Macierz odkształcenie-przemieszczenie

$$\begin{Bmatrix} \{E\}^{MID} \\ \{d\} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \quad [0] \quad K_1 [N_w] \\ [0] \quad \frac{\partial [N]}{\partial y} \quad K_2 [N_w] \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \quad \frac{\partial [N]}{\partial x} \quad K_{12} [N_w] \\ [0] \quad [0] \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial x} \right) \\ [0] \quad [0] \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial y} \right) \\ [0] \quad [0] \quad -2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{q_u\} \\ \{q_v\} \\ \{q_w\} \end{Bmatrix}_{20 \times 1}$$

$\begin{matrix} 1 \times 4 & 1 \times 4 & 1 \times 12 \\ 1 \times 4 & 2 \times 4 & 1 \times 12 \\ 1 \times 4 & 2 \times 4 & 2 \times 12 \\ 3 \times 4 & 3 \times 4 & 6 \times 20 \end{matrix}$

Macierz odkształcenie-przemieszczenie

Część związana z deformacjami błonowymi od przemieszczeń w płaszczyźnie elementu

Część związana z deformacjami błonowymi od przemieszczeń poza płaszczyznę elementu

$$\{q_{uv}\}_e = \begin{Bmatrix} \{q_{uv}\}_e \\ \{q_{vw}\}_e \end{Bmatrix}_{8 \times 1}$$

$$\begin{Bmatrix} \{E\}^{HID} \\ \{H\} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} [B_M] & [B_S] \\ [0] & [B_B] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{q_{uv}\}_e \\ \{q_{vw}\}_e \end{Bmatrix}_e$$

$[B_M]$ 3×8 $[B_S]$ 3×12
 $[0]$ 3×8 $[B_B]$ 3×12

Część związana z deformacjami giętnymi od przemieszczeń poza płaszczyznę elementu

Macierz odkształcenie-przemieszczenie

$$[B_M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} & [0] \\ [0] & \frac{\partial [N]}{\partial y} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} & \frac{\partial [N]}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(warstwa środkowa)

$$[B_S] =$$

(krzywizny powłoki)

$$\begin{bmatrix} k_1 [N_w] \\ k_2 [N_w] \\ k_{i2} [N_w] \end{bmatrix}$$

$$[B_B] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial x} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial y} \right) \\ -2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial x} \right) \end{bmatrix}$$

(zginanie)

Energia odkształcenia sprężystego

Energia sprężysta od deformacji błonowych

Energia sprężysta od deformacji giętnych

$$U_e = U_e(\{\varepsilon\}_{3 \times 1}^{HID}) + U_e(\{\eta\}_{3 \times 1})$$

$$U_e(\{\varepsilon\}_{3 \times 1}^{HID}) = \int_{A_e} \frac{1}{2} \underset{1 \times 3}{L} \underset{1 \times 3}{E}^{HID} \cdot \underset{3 \times 1}{\{n\}} dA_e =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{A_e} \underset{1 \times 20}{L} \underset{1 \times 20}{q} \underset{1 \times 20}{J} e \cdot \begin{bmatrix} \underset{8 \times 3}{[B_M]^T} \\ \underset{12 \times 3}{[B_S]^T} \end{bmatrix} \cdot \underset{3 \times 3}{[D_n]} \cdot \underset{3 \times 1}{\{\varepsilon^{HID}\}} dA_e =$$

Energia odkształcenia sprężystego od deformacji błonowych

$$U_e(\{\epsilon\}^{H1D}) = \frac{1}{2} L q \int_{A_e} \begin{bmatrix} [B_M]^T \\ 8 \times 3 \\ [B_S]^T \\ 12 \times 3 \end{bmatrix} [D_n] \cdot \begin{bmatrix} [B_M] \\ 3 \times 8 \\ [B_S] \\ 3 \times 12 \end{bmatrix} dA_e \cdot \{q\}_e =$$

$$= \frac{1}{2} L q \int_{A_e} \begin{bmatrix} [B_M]^T \\ 8 \times 3 \\ [B_S]^T \\ 12 \times 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [D_n] \cdot [B_M] & [D_n] \cdot [B_S] \\ 3 \times 3 & 3 \times 8 & 3 \times 3 & 3 \times 12 \end{bmatrix} dA_e \{q\}_e =$$

$$= \frac{1}{2} L q \int_{A_e} \begin{bmatrix} [B_M]^T [D_n] [B_M] & [B_M]^T [D_n] [B_S] \\ 8 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 8 & 3 \times 3 & 3 \times 12 \\ [B_S]^T [D_n] [B_M] & [B_S]^T [D_n] [B_S] \\ 12 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 8 & 12 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 12 \end{bmatrix} dA_e \{q\}_e$$

Energia odkształcenia sprężystego od deformacji giętnych

$$U_e(\{u\}) = \int_{Ae} \frac{1}{2} \cdot \underset{1 \times 3}{[D_e]} \cdot \underset{3 \times 1}{\{m\}} dA =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{Ae} \underset{1 \times 20}{[q]_e} \cdot \begin{bmatrix} \underset{8 \times 3}{[0]} \\ \underset{12 \times 3}{[B_B]^T} \end{bmatrix} \cdot \underset{3 \times 3}{[D_m]} \cdot \underset{3 \times 1}{\{u\}} dA =$$

$$= \frac{1}{2} \underset{1 \times 20}{[q]_e} \int_{Ae} \begin{bmatrix} \underset{8 \times 3}{[0]} \\ \underset{12 \times 3}{[B_B]^T} \end{bmatrix} \underset{3 \times 3}{[D_m]} \cdot \begin{bmatrix} \underset{3 \times 8}{[0]} \\ \underset{3 \times 12}{[B_B]} \end{bmatrix} dA_e \cdot \underset{20 \times 1}{\{q\}_e} =$$

Energia odkształcenia sprężystego od deformacji giętnych (c.d.)

$$\begin{aligned}
 U_e(\{q\}) &= \frac{1}{2} L q_e \int_{A_e} \begin{bmatrix} [0] \\ 8 \times 3 \\ [B_B]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [D_m][0] \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 8 \\ [D_m] \cdot [B_B] \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 12 \end{bmatrix} dA_e \cdot \{q\}_e = \\
 &= \frac{1}{2} L q_e \int_{A_e} \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ 8 \times 8 & 8 \times 12 \\ [0] & [B_B]^T [D_m] [B_B] \\ 12 \times 8 & 12 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 12 \end{bmatrix} dA_e \{q\}_e \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Energia odkształcenia sprężystego:

$$\Rightarrow U_e = \underbrace{\frac{1}{2} L q}_{{1 \times 20}} \underbrace{]}_{{20 \times 20}} \cdot \underbrace{\{q\}}_{{20 \times 1}}_e \quad \text{gdzie:}$$

$$[k]_e = \int_{A_e} \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} [B_M]^T [D_b] [B_M] & & \\ 8 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 8 \end{array} & \begin{array}{ccc} [B_M]^T [D_n] [B_S] & & \\ 8 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 12 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} [B_S]^T [D_n] [B_M] & [B_S]^T [D_n] [B_S] + [B_B]^T [D_m] [B_B] & & \\ 12 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 12 & 12 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 12 \end{array} \end{array} \right] dA_e$$

Macierz sztywności elementu powłokowego

Energia potencjalna obciążenia: $W_e = \underbrace{L q}_{{1 \times 20}} \underbrace{]}_{{20 \times 1}} \cdot \underbrace{\{F\}}_{{20 \times 1}}_e$

Element powłokowy 4 węzłowy w programie Ansys

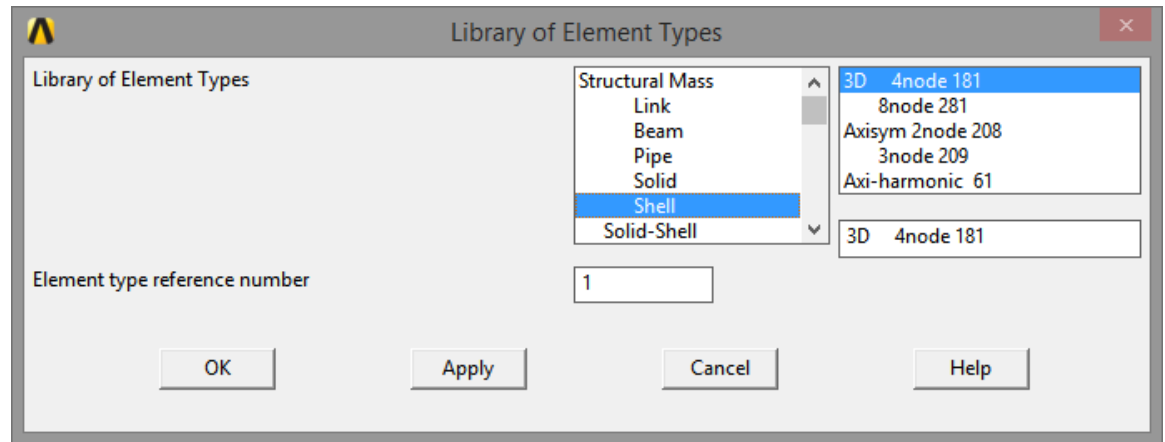
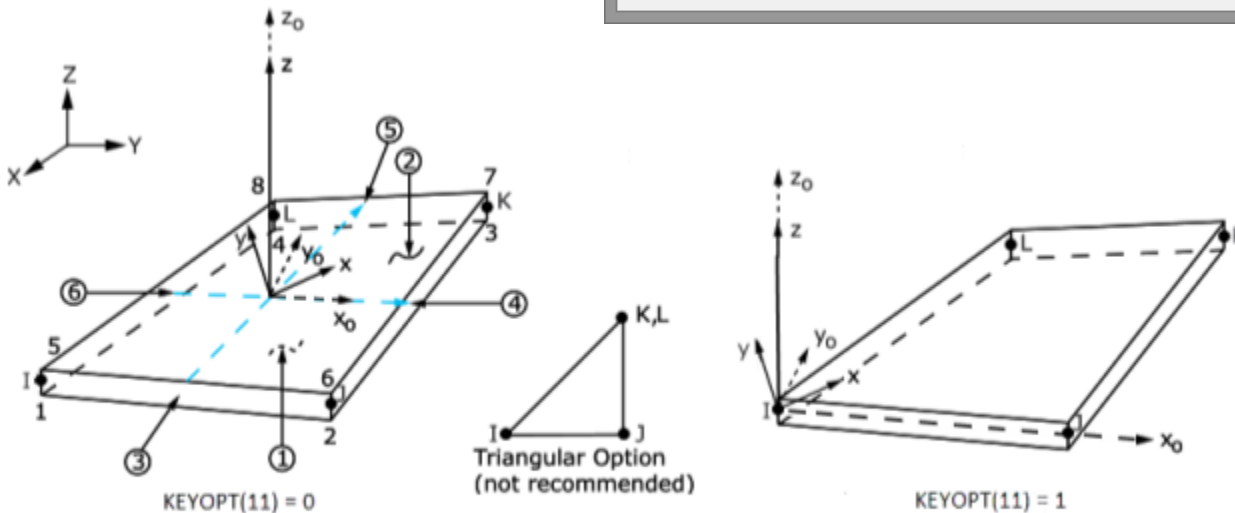


Figure 181.1: SHELL181 Geometry



x_0 = Element x axis if element orientation (**ESYS**) is not specified.

x = Element x axis if element orientation is specified.

Element powłokowy 8 węzłowy w programie Ansys

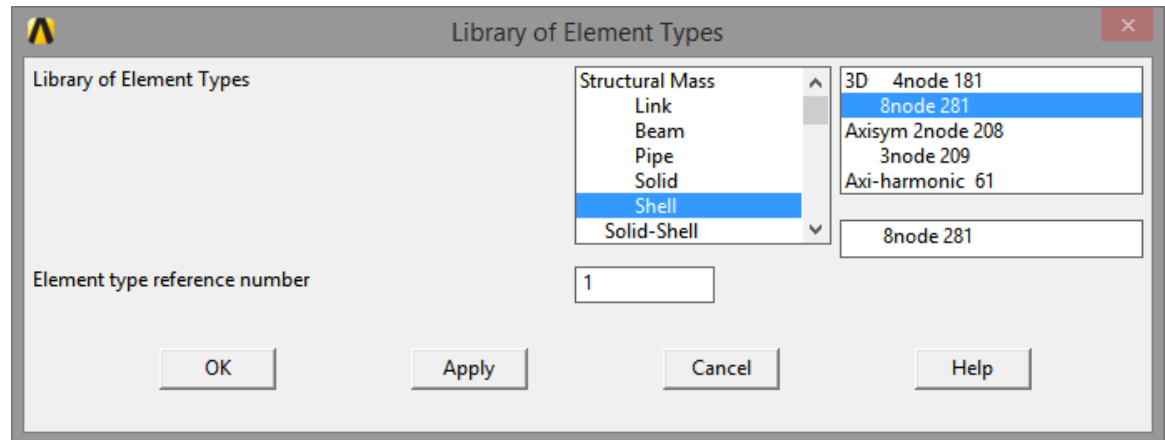
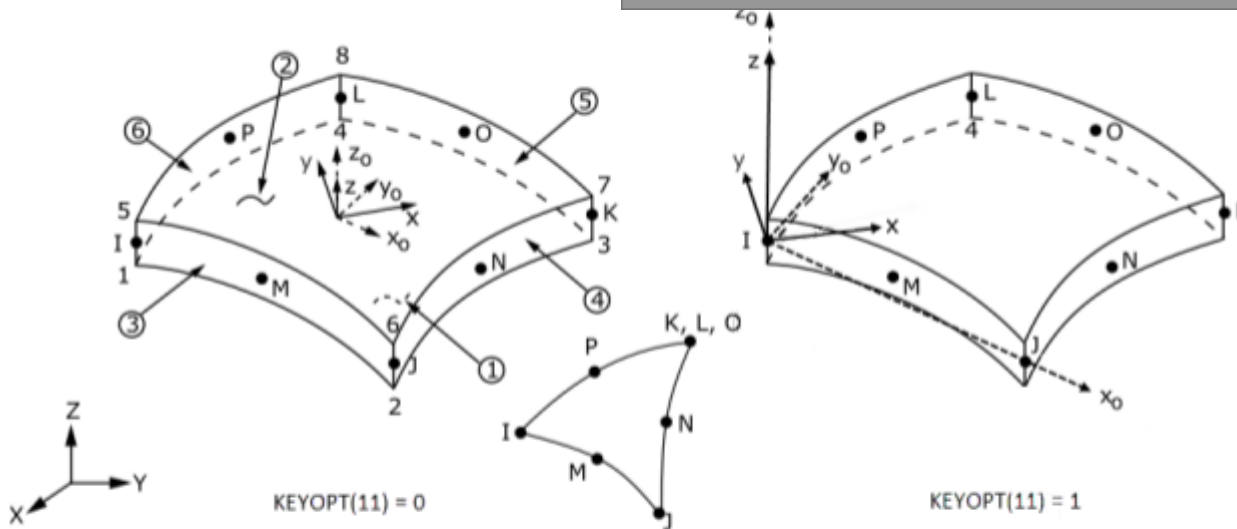


Figure 281.1: SHELL281 Geometry

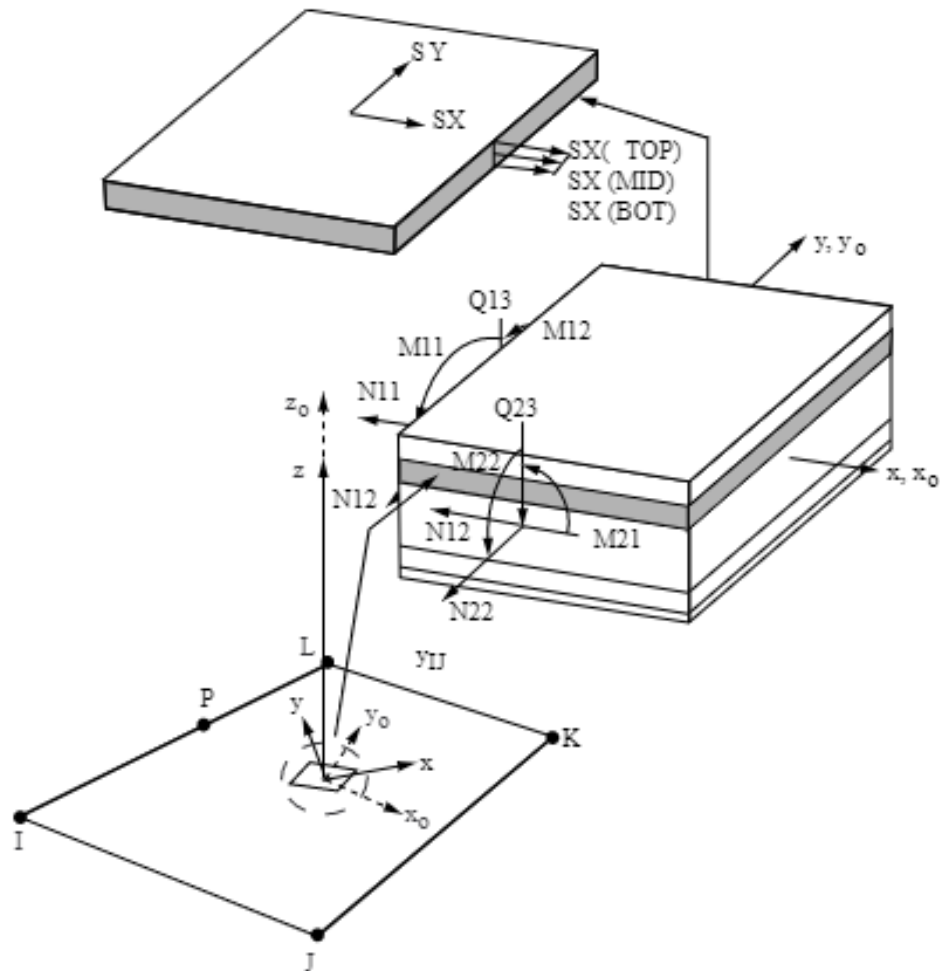


x_0 = Element x axis if element orientation (**ESYS**) is not specified.

x = Element x axis if element orientation is specified.

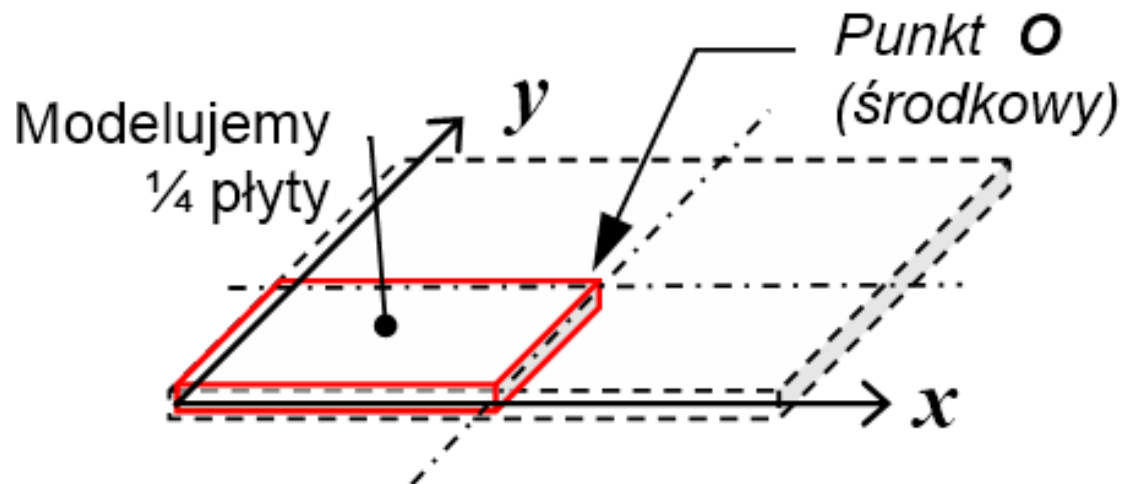
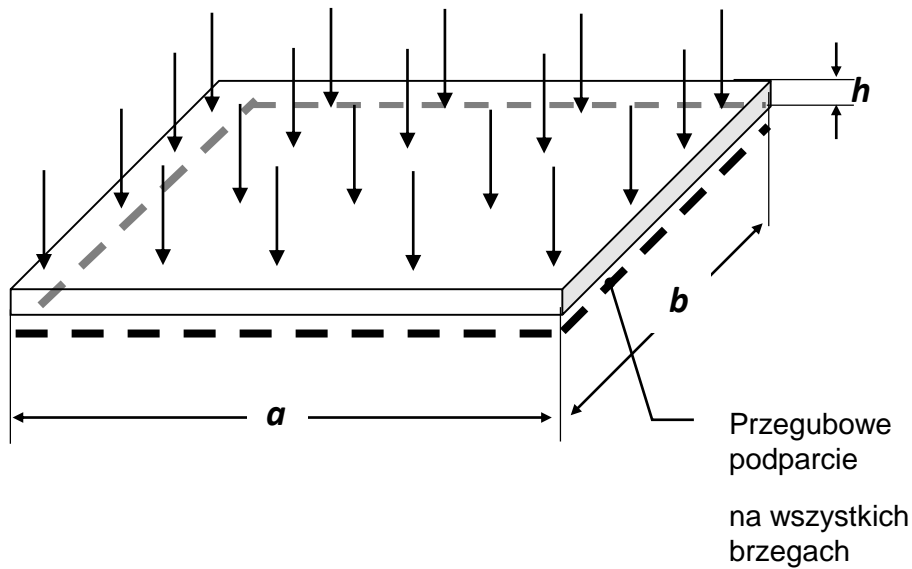
Opcja warstw w elemencie powłokowym

Figure 181.3: SHELL181 Stress Output



Zginanie płyty prostokątnej

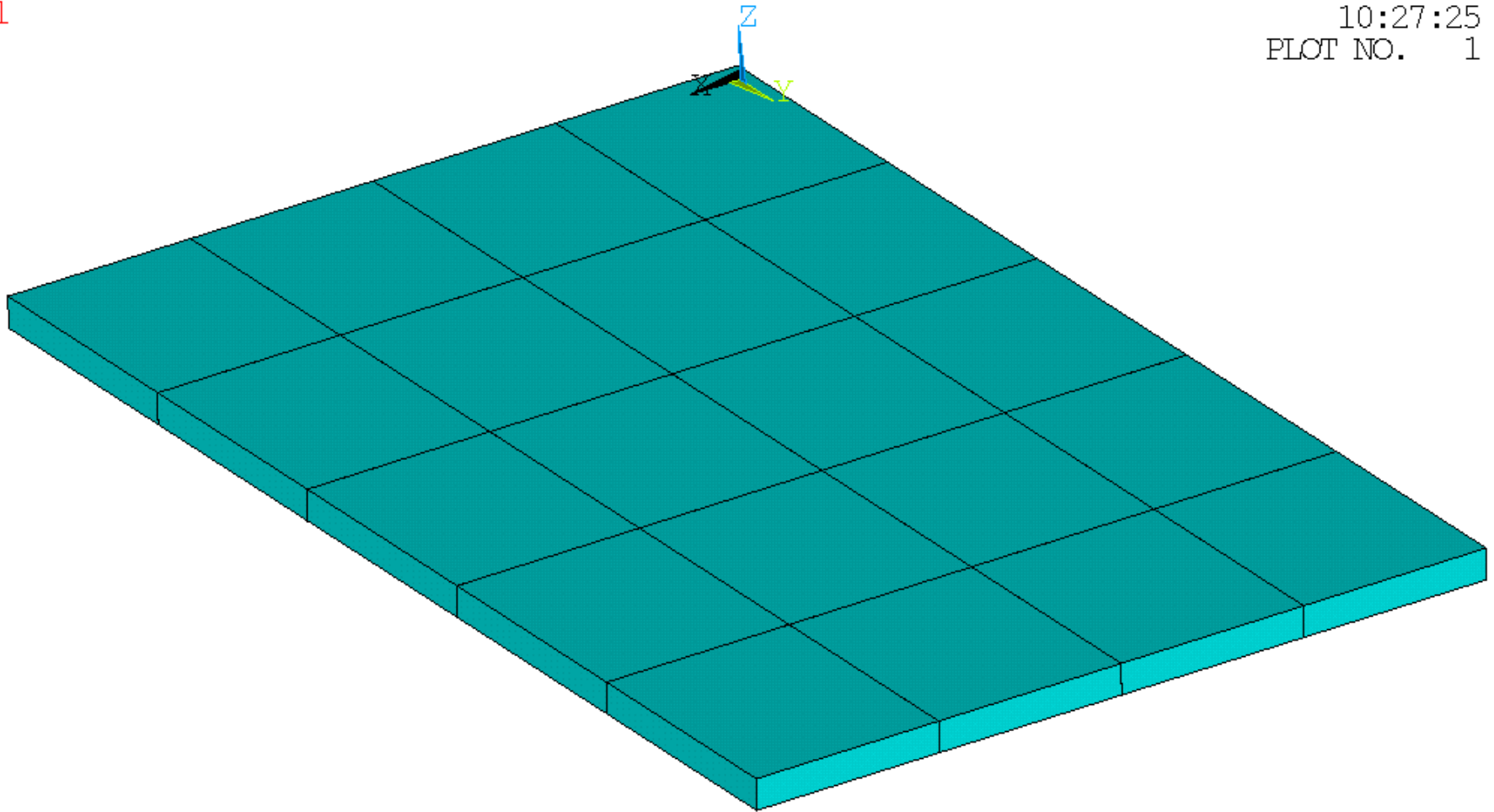
Dane: $q=0.1\text{MPa}$, $a=200\text{ mm}$, $b=300\text{mm}$, $h=4\text{mm}$, $E=2\cdot 10^5\text{ MPa}$, $\nu=0.3$



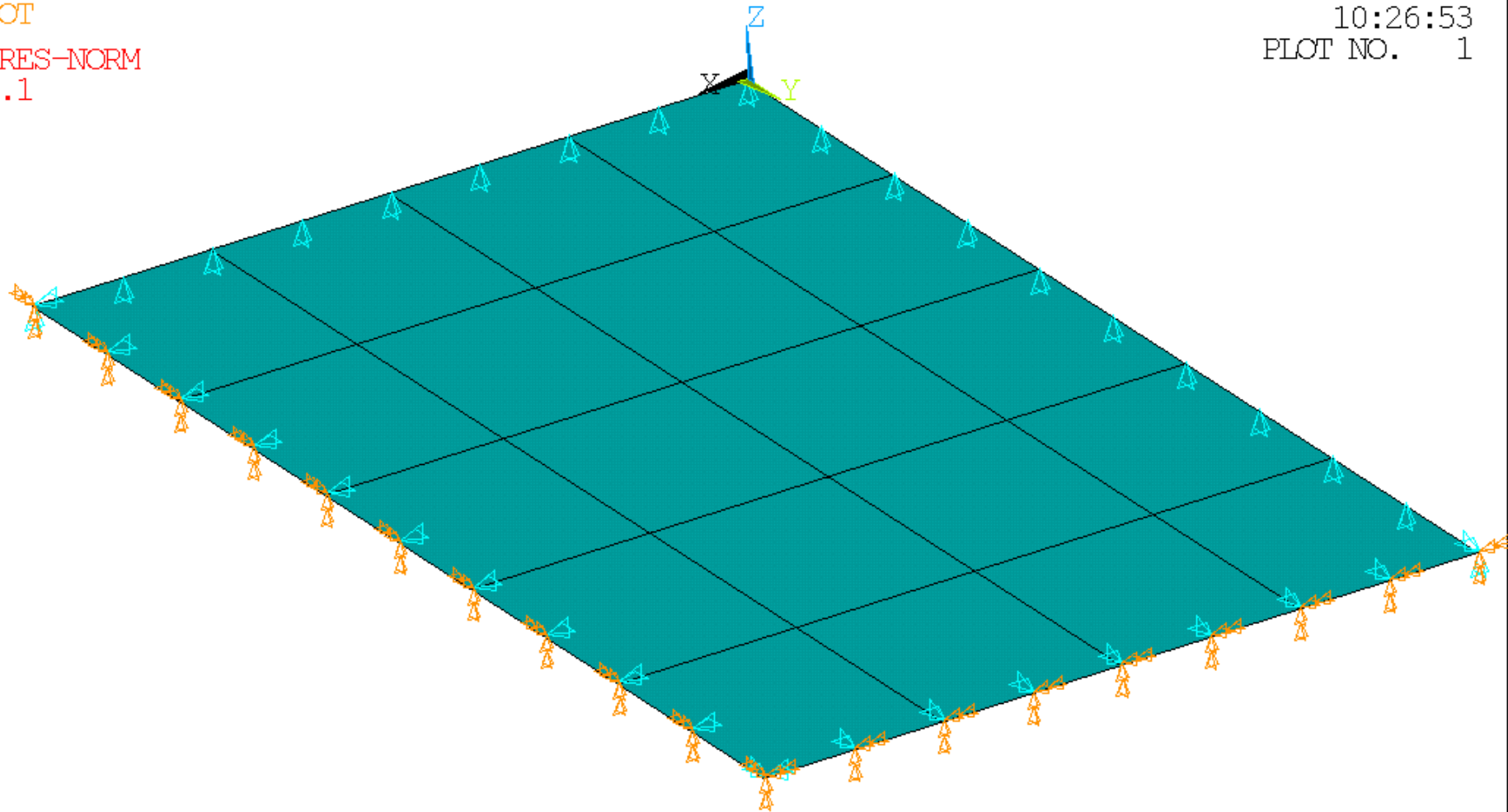
1
ELEMENTS

PRES-NORM

-.1



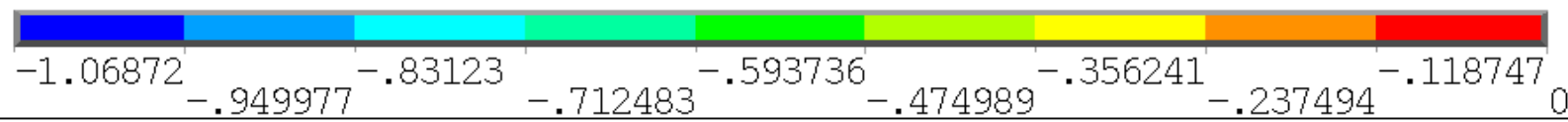
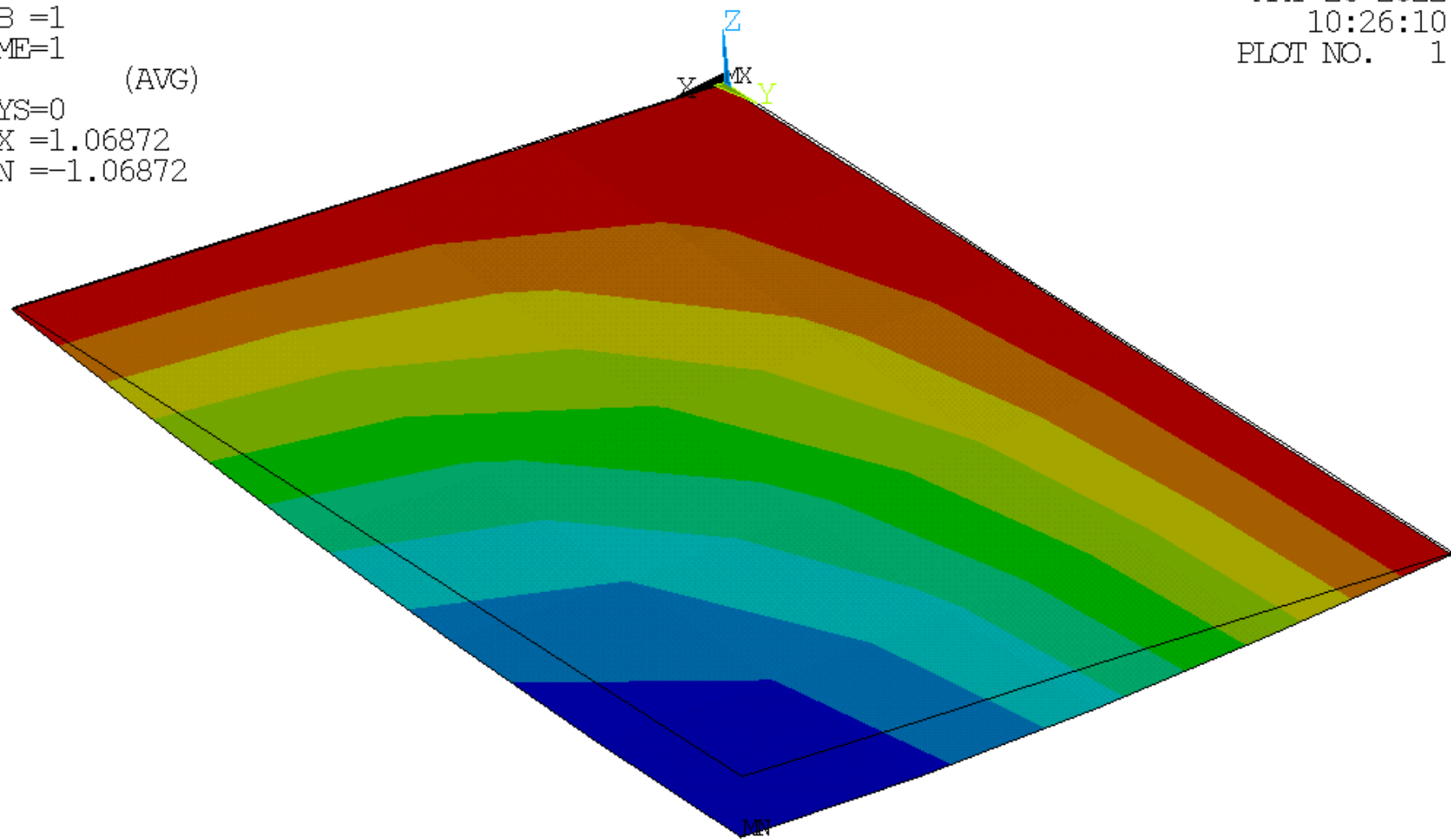
1
ELEMENTS
U
ROT
PRES-NORM
-.1



MAY 26 2022
10:26:10
PLOT NO. 1

1 NODAL SOLUTION

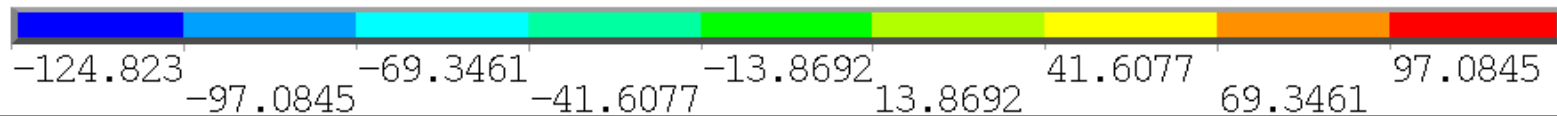
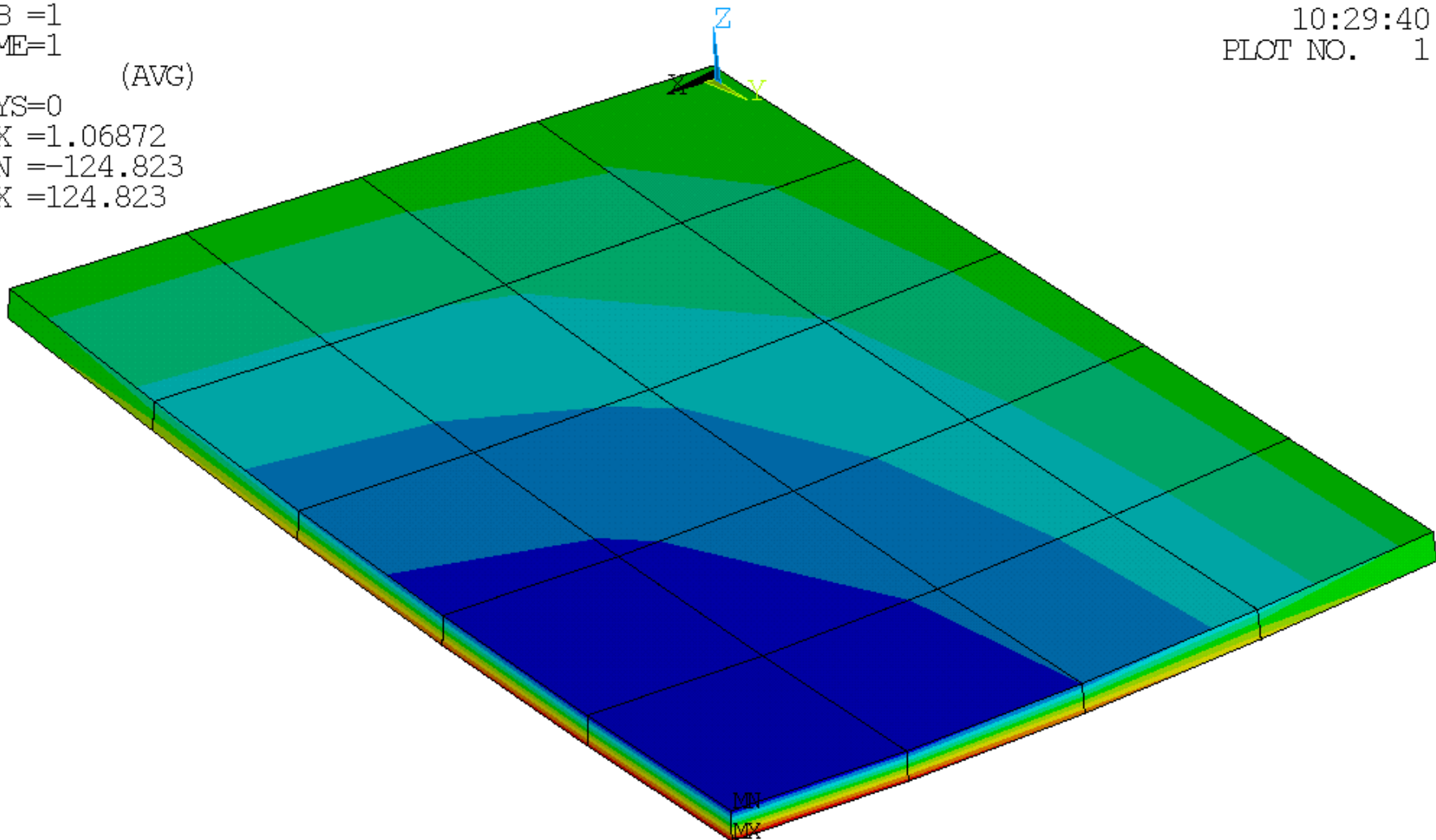
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UZ (AVG)
RSYS=0
DMX =1.06872
SMN =-1.06872



MAY 26 2022
10:29:40
PLOT NO. 1

1 NODAL SOLUTION

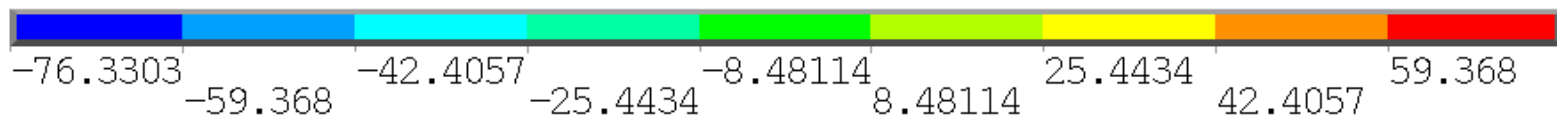
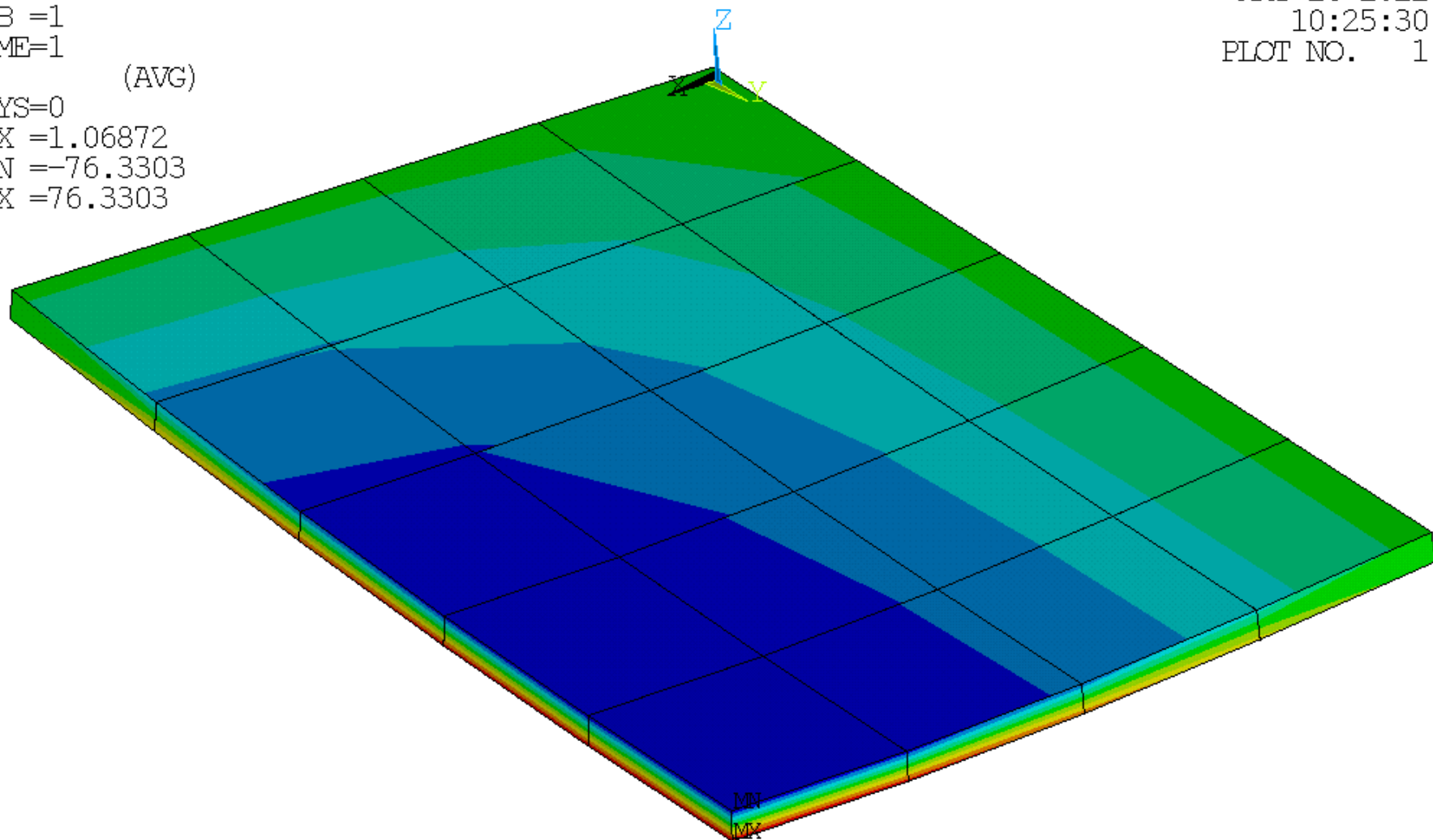
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SX (AVG)
RSYS=0
DMX =1.06872
SMN =-124.823
SMX =124.823



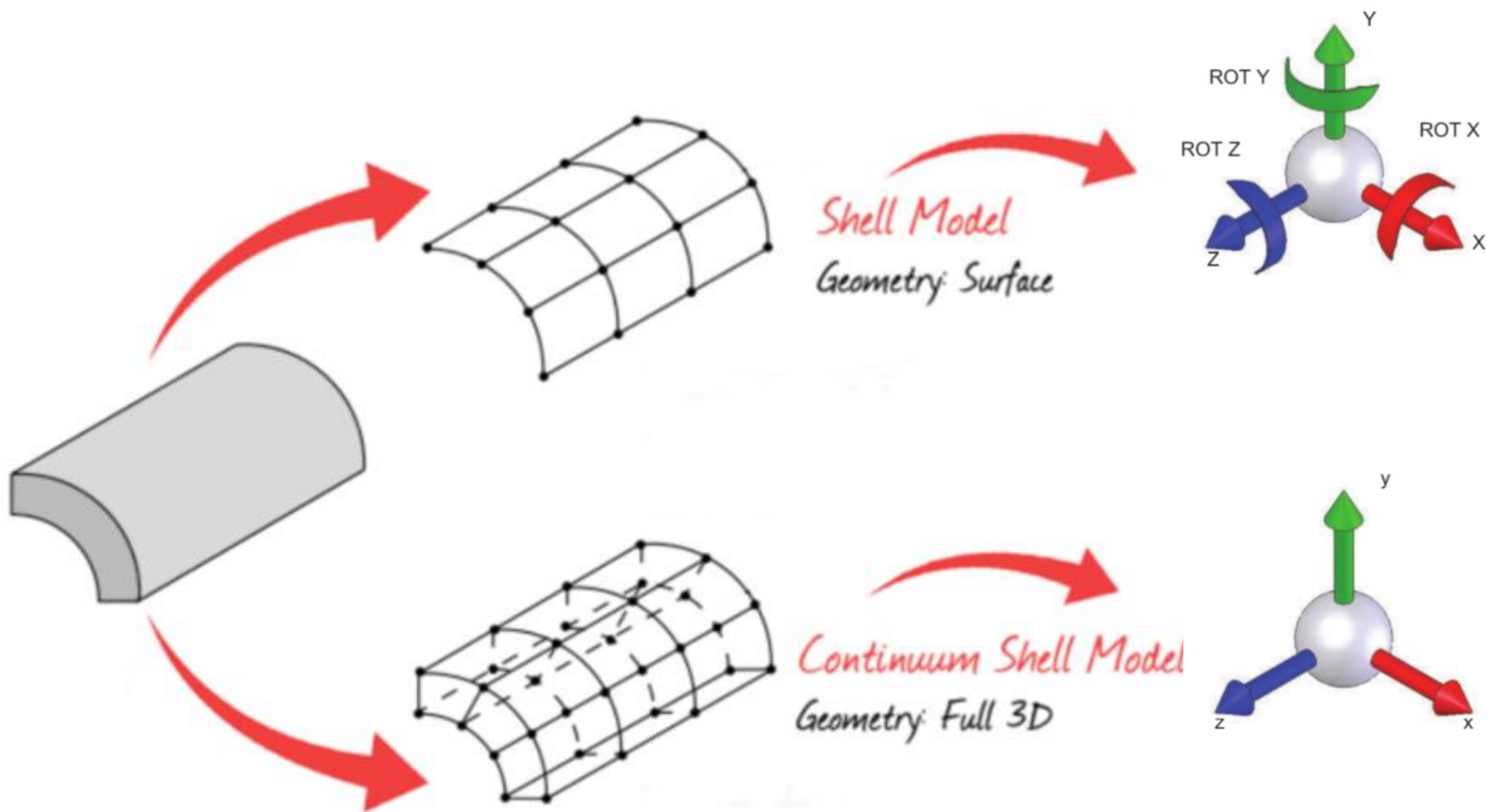
MAY 26 2022
10:25:30
PLOT NO. 1

1 NODAL SOLUTION

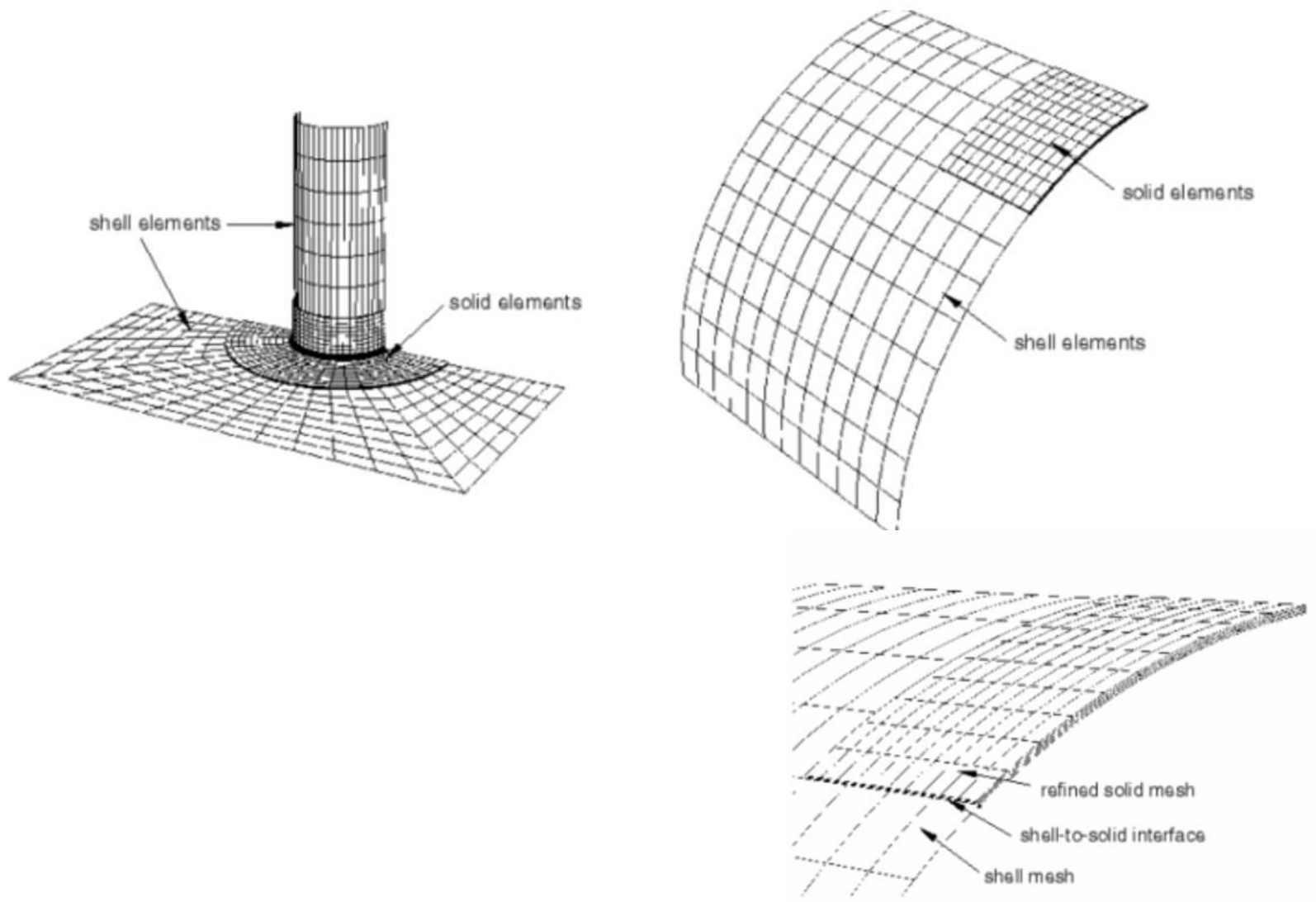
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SY (AVG)
RSYS=0
DMX =1.06872
SMN =-76.3303
SMX =76.3303



Porównanie elementu shell z elementem Solid3D



Lączenie elementów shell z elementem Solid3D



Modelowanie struktury skrzydła

